

## Tutoriumsblatt 5 zu Mathematik III für Physiker

### Aufgabe 1:

Betrachten Sie die folgende Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \exp(x_1^3 + x_2).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion differenzierbar ist und berechnen Sie für jeden Punkt  $a \in \mathbb{R}^2$  die Ableitung  $g'(a)$ .

### Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathbb{R}$  punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gleichmässig auf  $\mathbb{R}$  gegen  $f$  konvergiert.
3. Sei  $q \in [0, 1[$  und  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq q\}$ . Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $A$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert.

### Aufgabe 3:

Es seien  $X$  und  $Y$   $\mathbb{K}$ -Banachräume,  $U \subseteq X$  offen,  $a, b \in U$  und für die verbindende Strecke  $[[a, b]]$  gilt:  $[[a, b]] \subseteq U$ . Ferner sei  $f : U \rightarrow Y$  differenzierbar auf  $U$ . Zeige: Für jedes  $\xi \in U$  gilt:

$$\|f(b) - f(a) - f'(\xi)[b - a]\| \leq \|b - a\| \sup \left\{ \|f'(x) - f'(\xi)\| : x \in [[a, b]] \right\}.$$