Tutoriumsblatt 4 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:
Es sei X ein Banachraum, $U \subseteq X$ offen, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{K}$ und $g : U \to \mathbb{K}$ seien stetig und in a differenzierbar mit $g(a) \neq 0$. Zeige:

$$\begin{aligned} \tfrac{f}{g} : V &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \tfrac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

ist auf der offenen Menge $V := g^{-1}(\mathbb{K}\backslash\{0\})$ wohldefiniert und in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \tag{1}$$

Aufgabe 2: Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ \pi t \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{cases} (t-1)^4 \sin\left(\frac{\pi}{(t-1)^3}\right) & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases},$$

und $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3-1}{t-1} \\ \sin\left(\pi t^2\right) \end{pmatrix}$$

(mit offensichtlicher Fortsetzung bei 1)

- Zeige, daß f bei $t = 1$ differenzierbar ist.
- Verwende $\sin' t = \cos t$ und berechne $A'(1)$ und $B'(1)$.

Aufgabe 3: Betrachte nun $\mathscr{D} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\mathscr{D}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

- Zeige, daß $\mathscr{D}$ differenzierbar ist und berechne
$$\mathscr{D}'\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right]$$
- Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $\psi(t) := \mathscr{D}(A(t), B(t))$; berechne $\psi'(1)[x]$ für $x \in \mathbb{R}$.