Tutoriumsblatt 3 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:
Sind X und Y $\mathbb{K}$-Banachräume über demselben Körper $\mathbb{K}$, $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$ und $g : U \to Y$ differenzierbar in $a \in U$. Dann ist für jedes $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Abbildung $\begin{array}{rcl} \lambda f + \mu g : U & \to & Y \\ x & \mapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array}$ in a differenzierbar mit

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a). \tag{1}$$

Aufgabe 2: Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{t^4 - 1}{t - i} \\ (t - 3i)(t + 3i) \end{pmatrix} \end{array}$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

Aufgabe 3: Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 + x_3 x_2 \\ \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 \end{pmatrix} \end{array}$ an jeder Stelle $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung.