

Tutoriumsblatt 2 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:

Es sei X eine Menge, $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und

$$B(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : \|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in X\} < \infty\}.$$

Zeige: $(B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum.

Aufgabe 2: Zeige: Ist $(Y, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, dann ist $(B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Aufgabe 3: Es seien $(X, |\cdot|)$ und $(Y, \|\cdot\|)$ normierte Räume. Zeige

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : X \times Y &\rightarrow [0, \infty[\\ (x, y) &\mapsto |x| + \|y\| \\ \|\cdot\|_2 : X \times Y &\rightarrow [0, \infty[\\ (x, y) &\mapsto \sqrt{|x|^2 + \|y\|^2} \\ \|\cdot\|_\infty : X \times Y &\rightarrow [0, \infty[\\ (x, y) &\mapsto \max\{|x|, \|y\|\} \end{aligned}$$

sind äquivalente Normen auf $X \times Y$.