Tutoriumsblatt 14 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:
Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma-$endliche Maßräume und $k : X \times Y \to \mathbb{C}$ sei $\mu \otimes \nu-$meßbar und $M_{1,1} := \sup_{x \in X} \int_Y |k(x,y)| d\nu(y) < \infty$. Zeige daß durch

$$\begin{aligned} L : L^1(X) &\to L^1(Y) \\ f &\mapsto \int_X k(x, \cdot) f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

eine beschränkte lineare Abbildung mit $|||L||| \leq M_{1,1}$ definiert wird.

Aufgabe 2:
Es sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^3$, λ^3 das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^3$ und zu $R > 0$ sei

$$\begin{aligned} V_R : \mathbb{R}^3 &\to [-\infty, 0] \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } \|x\| > R \\ -\frac{1}{\|x\|} & \text{für } 0 < \|x\| \leq R \\ -\infty & \text{für } \|x\| = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige:

a) $V_R \in L^2(\mathbb{R}^3, \lambda^3)$.

b) $V_R \notin L^\infty(\mathbb{R}^3, \lambda^3)$.

Aufgabe 3:
Zeige, daß $C^1([0, 2\pi]) \subseteq \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ ein Untervektorraum ist und

$$\begin{aligned} A : C^1([0, 2\pi]) &\to \mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung definiert. Berechne für $\begin{aligned} f_n : [0, 2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nt) \end{aligned}$ die Werte $\|f_n\|_{\mathcal{L}^2}$ und $\|A[f_n]\|_{\mathcal{L}^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Ist A stetig?