Tutoriumsblatt 10 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 1:

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{A}-$meßbar mit $\int\limits_X f d\mu < \infty$. Zeige: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\mu(\{x \in X : f(x) > \varepsilon\}) < \infty$.

Aufgabe 2 - Poissonmaß

Gegeben sei die σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(a) Zeige, daß für $\lambda > 0$ durch

$$\mu(A) := e^{-\lambda} \sum_{j \in A} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}, \qquad A \subseteq \mathbb{N} \tag{1}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß (Poissonmaß) definiert wird. Damit definiert $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ einen Maßraum.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty[$ eine nicht-negative Funktion. Zeige, daß dann gilt:

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = e^{-\lambda} \sum_{j \in \mathbb{N}} f(j) \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}. \tag{2}$$

(c) Sei $g : \mathbb{N} \to]0, \infty[$ gegeben durch $g(n) := \frac{1}{n}$. Zeige, daß das Integral

$$\int_{\mathbb{N}} g \,\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

konvergiert und berechne dessen Wert.

(d) Sei nun $0 < \lambda < 1$ und $h : \mathbb{N} \to]0, \infty[$ gegeben durch $h(n) := (n-1)!$. Zeige, daß das Integral

$$\int_{\mathbb{N}} h \,\mathrm{d}\mu \tag{4}$$

konvergiert und berechne dessen Wert.