Tutoriumsblatt 1 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 1:
Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 > 0, ..., \lambda_d > 0$. Zeige, dass dann durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d &\to \mathbb{C} \\ ((x_1, ..., x_d), (y_1, ..., y_d)) &\mapsto \langle (x_1, ..., x_d), (y_1, ..., y_d) \rangle := \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \overline{x_j} y_j \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

Aufgabe 2:
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien außerdem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in V mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.
Zeige, dass dann $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{K}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle \tag{1}$$

ist.

Aufgabe 3:
Sei $s(\cdot, \cdot)$ eine Sesquilinearform auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und $q(\cdot)$ die zugehörige quadratische Form. Seien weiter $v, w \in V$.

a) Zeige, dass die Parallelogrammidentität gilt, d.h.

$$q(v + w) + q(v - w) = 2q(v) + 2q(w) \tag{2}$$

b) Zeige für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dass auch die Polarisierungsidentität gilt, d.h.

$$s(v, w) = \frac{1}{4}\Big(q(v + w) - q(v - w) + iq(v - iw) - iq(v + iw)\Big) \tag{3}$$