

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (H02T2A4)

Gegeben sei die parameterabhängige, skalare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x'' = \alpha x' - x + x^2 \quad (1)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Transformieren Sie (1) auf ein äquivalentes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form

$$\begin{aligned} x' &= f_\alpha(x, y) \\ y' &= g_\alpha(x, y) \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie für alle $\alpha \neq 0$ alle asymptotisch stabilen Ruhelagen dieses Differentialgleichungssystems.

Aufgabe 26: (F11T3A3)

- a) Sei

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^3 + 3xy^2 - 3xy \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von g und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein (striktes) lokales Maximum oder Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt.

- b) Welche stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -6xy + 3x \\ \dot{y} &= 3x^2 + 3y^2 - 3y \end{aligned}$$

sind stabil, welche instabil?

Aufgabe 27: (H07T3A4)

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= y \cos(x) \\ y' &= \sin(x) \end{aligned}$$

- a) Begründen Sie, warum das obige System für jeden Anfangswert (x_0, y_0) eindeutig lösbar ist und warum die Lösungen für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.
- b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.