Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 19: (H04T1A1)
Sei A eine reelle $n \times n-$Matrix mit nur einem ($n-$fachem) Eigenwert μ.

a) Begründen Sie, warum dann $(A - \mu E_n)^n = 0$ ist. (E_n ist $n \times n-$Einheitsmatix, 0 Nullmatrix)

b) Folgern Sie aus (a), daß man die Exponentialmatrix e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$ als Produkt von $e^{\mu t}$ mit einer endlichen Summe von Matrizen ausdrücken kann.

c) Wenden Sie (b) an, um die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu ermitteln.

Aufgabe 20: (F05T3A4)
Mit reellen Zahlen a, b, c sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

Geben Sie für jedes der beiden Differentialgleichungssysteme $y' = Ay$ und $y' = By$ eine Basis des Raumes der Lösungen an. Geben Sie für jedes der beiden Systeme notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konstanten a, b, c an, so daß Folgendes gilt:

a) Für alle Lösungen φ ist $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$.

b) Es gibt eine nicht-konstante periodische Lösung.

Aufgabe 21: (F07T3A5)
Man bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} x$$