

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 16: (H18T1A3)

In dieser Aufgabe sollen Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgaben

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \cos(t), \quad x(0) = c$$

für $c \in [0, \infty[$ diskutiert werden. Unter einer globalen Lösung verstehen wir in dieser Aufgabe stets eine Lösung, die auf ganz \mathbb{R} definiert ist.

- Bestimmen Sie für jedes $c > 1$ eine globale Lösung x_c des entsprechenden Anfangswertproblems. Warum ist dies deren einzige globale Lösung?
- Geben Sie für jedes $0 \leq c \leq 1$ jeweils zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems an.

Aufgabe 17: (F10T3A1)

Man bestimme alle Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Hat das System eine stabile oder eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung?

Aufgabe 18: (H07T3A5)

Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0 \tag{1}$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).
- Bestimmen Sie alle Startwerte $(x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)) \in \mathbb{R}^3$, so daß für deren eindeutige Lösung $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$.