Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (H18T2A4)
Sei $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld mit $\langle f(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. (Dabei bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.) Man zeige:

a) Für jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist die Euklidische Norm $|\varphi(t)|$ konstant.

b) Jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung φ kann zu einer Lösung $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ fortgesetzt werden.

Aufgabe 11: (H18T2A1)
Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \end{array}$.

a) Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert.

c) Sei $q \in [0, 1[$ und $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le q\}$. Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 12: (H07T2A4)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) \ge f(t)$ für alle $t \ge 0$ und sei $f(0) \ge 1$.

a) Zeigen Sie, daß f auf $[0, \infty[$ streng monoton steigend ist.

b) Zeigen Sie, daß $f(t) \ge e^t$ für alle $t \ge 0$.