Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 7: (F18T1A1)
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen (uneigentliche Integrale und Grenzwerte haben in dieser Aufgabe im Falle der Existenz immer einen endlichen Wert).
Für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

a) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

b) Wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$.

c) Wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Aufgabe 8: (F18T2A2)
Diese Aufgabe befaßt sich mit der Maximierung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 4(x + y) \end{array}$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$.

a) Zeigen Sie die Existenz einer globalen Maximalstelle.

b) Berechnen Sie die globale Maximalstelle und bestimmen Sie das Maximum von f unter obiger Nebenbedingung.

Aufgabe 9: (F06T2A5)
Es sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein $C^\infty-$Vektorfeld mit $\langle v(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Beweisen Sie, daß jede maximale Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad \text{mit} \quad \|x(0)\| = 1$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und stets $\|x(t)\| = 1$ erfüllt.