

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (F04T1A4) Welche der drei Differentialgleichungen

$$(a) y' = |y| \quad (b) y' = \sqrt{|y|} \quad (c) y' = y^2$$

besitzen eine Lösung, bzw. eine eindeutige Lösung φ mit $\varphi(0) = 0$?

Aufgabe 5: (F03T1A2) Finden Sie eine Lösung λ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = (t + x(t))^2, \quad x(0) = 0. \tag{1}$$

Was ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung? Ist diese Lösung eindeutig?

Aufgabe 6: (H11T3A5)

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\gamma = \sup_{t \geq 0} \int_0^t p(s) ds \in \mathbb{R}$$

- Berechnen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ die Lösungen $x(t)$ des Anfangswertproblems $x'(t) = p(t)e^{x(t)}$ für $t > 0$ mit $x(0) = x_0$.
- Beweisen Sie: Ist $1 > \gamma e^{x_0}$, so existiert die Lösung in (a) für alle Zeiten $t > 0$.