Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (H18T3A4)
Wir betrachten den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(t-\pi)} & \text{für } t \in [0, \pi] \\ -1 + i + 2e^{4it} & \text{für } t \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Weg γ (entweder in Worten oder mit Hilfe einer Skizze).

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{(z - (2-i))e^{iz}}{(z^2+1)(z^2-3+4i)} dz.$$

Hinweis: Berechnen Sie $(2-i)^2$.

Aufgabe 38: (H18T2A2)

a) (i) Zeigen Sie, daß die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \tag{1}$$

absolut konvergiert für jedes $z \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : z \mapsto f(z)$, die so entsteht, stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Geben Sie (ohne Beweis) die größte offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ an. so daß die Funktion f durch (1) auf U definiert und dort holomorph ist.

b) Die komplexen Zahlen $a_1, ..., a_n$ (mit $n \geq 1$) erfüllen $|a_1| = ... = |a_n| = 1$. Zeigen Sie, daß es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt, so daß das Produkt der Abstände zwischen z und a_j für $j = 1, ..., n$ mindestens 1 ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z) := (z - a_1) \cdots (z - a_n)$.

Aufgabe 36: (H18T1A2)
Bezeichne $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x^2\}$ den Definitionsbereich der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 + y^2 + 2y$.

a) Skizzieren Sie die Menge D.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion f ein globales Minimum besitzt.

c) Bestimmen Sie das globale Minimum von f sowie alle Stellen in D, bei denen dieses angenommen wird.