

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (H18T1A1)

a) Bestimmen Sie die Menge $K \subseteq \mathbb{R}$, die genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$ enthält, für welche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}}$ gegen eine reelle Zahl konvergiert.

b) Für $a \in \mathbb{C}$ bezeichne $\gamma_a : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto a + 2e^{it}$. Bestimmen Sie den Wert des komplexen Wegintegrals

$$\int_{\gamma_a} \frac{1 - 2z^2}{z^3} dz$$

für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 2$.

Aufgabe 35: (H18T1A5)

Geben Sie jeweils entweder ein Beispiel an (ohne Begründung) oder begründen Sie, warum es ein solches nicht geben kann:

- a) Eine holomorphe Funktion $h : \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \rightarrow 0} h(z)\sqrt{|z|} = 1$.
- b) Eine stetig differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit
 - (i) $F(0) = 0$
 - (ii) Die Realteile der Eigenwerte der Ableitung $DF(0)$ sind kleiner oder gleich 0.
 - (iii) 0 ist keine stabile Ruhelage der Differentialgleichung $y' = F(y)$.
- c) Ein Polynom $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß die Differentialgleichung $y' = F(y)$ keine globale Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 36: (H18T3A1)

- a) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\exp(f(z)) = c$ für ein $c \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.
- b) Sei $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $M \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re}(g(z)) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß g konstant ist.