

## Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

### Aufgabe 31: (F11T2A1)

Geben Sie jeweils alle holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit den angegebenen Eigenschaften an und begründen Sie jeweils, daß es über die von Ihnen angegebenen Funktionen hinaus keine weiteren mit diesen Eigenschaften gibt.

- a)  $f'(z) = zf(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $f(0) = 1$ .
- b)  $f(f(z)) = z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 1$ .

### Aufgabe 32: (H10T2A2)

Es sei  $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  die offene Einheitskreisscheibe und  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion für die  $|f(0)| < 1$  und  $|f(z)| \leq 1$  für alle  $z \in \mathbb{E}$  gilt. Man zeige, daß dann sogar  $|f(z)| < 1$  für alle  $z \in \mathbb{E}$  gelten muß.

### Aufgabe 33: (F13T1A1)

- a) Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f(z) - 3| \geq 1$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- b) Gibt es eine holomorphe Funktion  $f$  auf einer Umgebung der 0, so daß  $f^{(n)}(0) = n^{2n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt?