

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (F11T2A1)

Geben Sie jeweils alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften an und begründen Sie jeweils, daß es über die von Ihnen angegebenen Funktionen hinaus keine weiteren mit diesen Eigenschaften gibt.

- a) $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$.
- b) $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

Aufgabe 32: (H10T2A2)

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion für die $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Man zeige, daß dann sogar $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muß.

Aufgabe 33: (F13T1A1)

- a) Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|f(z) - 3| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- b) Gibt es eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung der 0, so daß $f^{(n)}(0) = n^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?