

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (H14T1A5)

Gegeben sei das autonome zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \exp(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x \exp(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, daß dieses System zu jedem Anfangswert genau eine auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung besitzt.
- Zeigen Sie, daß die Orbits der Lösungen in konzentrischen Kreislinien (einschließlich Radius 0) um den Ursprung enthalten sind.
- Zeigen Sie, daß jede nichtkonstante maximale Lösung periodisch ist, und bestimmen Sie die Periodenlänge.

Aufgabe 29: (F09T3A3)

Gegeben sei die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = 2x - 4x^3$$

- Bestimmen Sie alle stationären Lösungen dieser Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) für diese Differentialgleichung.
- Zeigen Sie, daß alle maximalen Lösungen dieser Gleichung auf ganz \mathbb{R} existieren.
- Skizzieren Sie das Phasenportrait für diese Differentialgleichung. Begründen Sie mit dessen Hilfe, welche der stationären Lösungen stabil, welche instabil sind. Besitzt die Differentialgleichung nicht konstante, periodische Lösungen?

Aufgabe 30: (H01T2A1)

Skizzieren Sie die Phasenportraits der ebenen autonomen Systeme $\dot{x} = Ax$ für die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$