Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H13T1A5)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xyy' = x^2 + y^2, \quad y(1) = 1$$

auf dem ersten Quadranten $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Geben Sie auch den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

Aufgabe 2: (F03T3A5)
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $P : G \to \mathbb{R}$ und $Q : G \to \mathbb{R}$ zwei C^1-Funktionen. Wann heißt eine Differentialgleichung der Form $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ exakt auf G? Geben Sie eine Bedingung hierfür an und illustrieren Sie dies anhand des Beispiels

$$2xe^y dx + (x^2 e^y - 1)dy = 0$$

auf $G = \mathbb{R}^2$. Finden Sie diejenige Lösungskurve (in impliziter Form), die durch den Punkt $(1, 0)$ geht.

Aufgabe 3: (H07T1A5)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$t^2 + x^2 + 2tx\dot{x} = 0, \quad x(1) = 1$$

a) Zeigen Sie, daß es sich um eine exakte Differentialgleichung handelt.

b) Bestimmen Sie das maximale Intervall, auf das sich diese Lösung fortsetzen läßt.