# Übungen zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 25:** (F09T3A4)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis um 0 in $\mathbb{C}$.

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $f(z)^3 = z^2$ für alle $z \in \mathbb{E}$?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n^4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$?

c) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 2i, \quad \lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1?$$

**Aufgabe 26:** (H18T2A3)

a) Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ erfüllt $a > 1$. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ besitzt und diese Lösung reell und positiv ist.

b) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^\pi \frac{1}{3 + 2\cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

**Aufgabe 27:** (H18T3A2)

a) Sei $f : \mathbb{C}\backslash -1 \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := \frac{3z+1}{u+1}$. Bestimmen Sie das Bild von $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter $f$.

b) Es seien $B_2(1)_= \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2\}$ und $G := \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung $g : B_2(1) \to G$.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, daß es eine biholomorphe Abbildung

$$h : \mathbb{C}\backslash\{x + iy : y = 0, x \in \mathbb{R}\backslash] - 1, 1[\} \to B_1(0)$$

gibt.

**Aufgabe 28:** (H18T1A4) In dieser Aufgabe bezeichne $H := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$ einen Streifen in $\mathbb{C}$.

a) Geben Sie (mit Begründung) eine holomorphe bijektive Abbildung $g : S \to H$ an.

b) Bestimmen Sie eine holomorphe, bijektive Abbildung $S \to S$ mit $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.