Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 21: (H17T1A1)

a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}\,(z) \le 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$? Falls ja, bestimmen Sie, ob A kompakt ist.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n$$

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es seien C^1-Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen $g(x,y) := e^{u(x,y)} \cos(v(x,y))$ und $h(x,y) = e^{u(x,y)} \sin(v(x,y))$ für $x + iy \in \Omega$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen oder nicht.

Aufgabe 22: (F06T2A3)
Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $f(e^{\sqrt{2}\pi i n}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

Aufgabe 23: (H07T2A2)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville und beweisen Sie ihn mit Hilfe der Koeffizientenabschätzung von Cauchy.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a,b) \neq (0,0)$. Zeigen Sie: Ist die Funktion $a\mathrm{Re}\, f + b\mathrm{Im}\, f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 24: (H17T3A5) Sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \end{array}$ holomorph.

a) Stellen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$ die Koeffizienten a_k der obigen Potenzreihe durch ein Wegintegral über $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dar. Folgern Sie daraus

$$|a_k| \le r^{-k} \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

b) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte zusätzlich $\limsup\limits_{|z| \to \infty} |z|^{-n} |f(z)| < \infty$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\le n$ ist.

c) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun zusätzlich $\liminf\limits_{|z| \to \infty} |z|^{-n} |f(z)| > 0$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\ge n$ ist.