Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 11: (H18T3A5) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1' &= \dfrac{y_1}{2(1+t)} \\ y_2' &= \dfrac{t}{t^2-1} y_2 + \alpha y_1 \end{cases}$$

mit $(y_1(0), y_2(0)) = (2,1)$ für den Fall $\alpha = 1$, indem Sie zunächst den Fall $\alpha = 0$ betrachten.

Aufgabe 12: (H05T2A5)
Es sei A eine nilpotente reelle $n \times n$ Matrix mit $A^k = 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m > k$. Zeigen Sie, daß für eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = Ay$ die Asymptotik

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^m} = 0 \tag{1}$$

gilt.

Aufgabe 13: (F11T1A2)
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' = e^{4t}$$

Aufgabe 14: (H13T1A4) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax$$

an. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $x(0) = v$ genügt und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.

Aufgabe 15: (H10T3A4) Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 8x + 10y \\ \dot{y} &= -5x - 6y \end{aligned}$$

und skizzieren Sie das Phasenportrait.

Aufgabe 16: (F14T3A5) Es seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t), x(0) = 0$.

Aufgabe 17: (F06T1A5) Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\beta, \gamma \neq 0$. Man zeige: Genau dann sind sämtliche Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $x' = Ax$ periodisch, wenn $\frac{\beta}{\gamma}$ rational ist.

Aufgabe 18: (H06T1A3) Gegeben sei ein lineares System erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$u' = Au$$

mit einer 2×2-Matrix mit komplexen Koeffizienten.

a) Welche Bedingung an die Eigenwerte und Eigenräume von A sind äquivalent damit, daß die triviale Lösung $u_0 \equiv 0$ stabil bei $t \to \infty$ ist, dh, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle Lösungen u mit $|u(0)| < \delta$ gilt $|u(t)| < \varepsilon$ für alle $t > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Welche Bedingung an die Eigenwerte von A sind äquivalent damit, daß die triviale Lösung sogar asymptotisch stabil ist, dh. daß sie einerseits stabil ist und zusätzlich $|u(t)| \xrightarrow{t\to\infty} 0$ gilt für alle Lösungen mit $|u(0)| < \delta$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 19: (F13T1A5)
Es sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y + 3 \\ \dot{y} &= x^2 - 4y - 20 \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems.

b) Untersuchen Sie die stationären Punkte durch Linearisieren auf Stabilität.

Aufgabe 20: (H18T2A5)
Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 - y. \end{aligned}$$

Man zeige, daß dieses System den Nullpunkt als einzige Ruhelage hat und daß die Nullösung stabil ist.
Hinweis: Man suche eine Ljapunov-Funktion der Form $V(x,y) = \alpha x^4 + \beta y^2$ mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Zur Erinnerung: Eine Ljapunov-Funktion für das Vektorfeld $f(x,y)$ auf $\mathbb{R}^2$ ist eine stetig differenzierbare Funktion $V(x,y)$, die längs jedes Integralkurve von f fällt, dh. $\langle \mathrm{grad} V(x,y), f(x,y)\rangle \leq 0$.