Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (F03T3A4) Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und in der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig. Geben Sie die Definition des Begriffs der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

an. Bestimmen Sie die maximale Lösung des Problems (1) im Falle $f(x, y) = x^2y^2$.

Aufgabe 2: (F08T3A4)
Man bestimme alle beschränkten Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = 3(tx)^2 - 12t^2 \tag{2}$$

mit maximalem Definitionsbereich.

Aufgabe 3: (H08T1A5)
Zeigen Sie, daß jede auf ihren maximalen Derfinitionsbereich fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \exp(y) \cdot \sin(y)$$

bereits auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Aufgabe 4: (H09T1A1) Für die Differentialgleichung $u'(x) = \sqrt{1 - u(x)^2}$ bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ zu den Anfangswerten

a) $u(0) = 1$

b) $u(0) = -1$.

Aufgabe 5: (H03T2A4) Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{\sin(t + y)} - 1, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 6: (H05T1A3) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = 0 \tag{3}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

a) f stetig differenzierbar $\Rightarrow$ (3) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

b) f stetig differenzierbar und $x :]-1, 1[\to \mathbb{R}^n$ die maximal fortgesetzte Lösung von (3) $\Rightarrow \limsup_{t\to 1} |x(t)| = \infty$.

c) (3) hat eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem Intervall $]-\delta, \delta[$ mit $\delta > 0 \Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von 0 Lipschitz-stetig.

d) f beschränkt und lokal Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ (3) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Die Antwort ist durch Hinweis auf entsprechende allgemeine Aussagen oder Gegenbeispiel kurz zu begründen.

Aufgabe 7: (H17T1A4) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{x^2}{1+t^2}, \quad x(0) = c,$$

wobei $c > 0$ ein positiver Parameter ist.

a) Man zeige: Ist I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, so hat φ keine Nullstelle.

b) Man finde ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Lösung $\varphi_c : I \to \mathbb{R}$.

c) Man setze φ_c zu einer maximalen Lösung $\widetilde{\varphi}_c :]t^-(c), t^+(c)[\to \mathbb{R}$ fort. Wie lauten die Entweichzeiten $t^-(c)$ und $t^+(c)$ und wie verhält sich $\widetilde{\varphi}_c(t)$ für $t \to t^+(c)$ und $t \to t^+(c)$?

Aufgabe 8: (H11T3A3)

Sei $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & e^{x^2t^2} + t^2 \end{array}$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von F.

b) Bestimmen Sie zu $x_0 \in \mathbb{R}$ alle Lösungen von

$$xt^2x' + t(x^2 + e^{-x^2t^2}) = 0, \quad x(1) = x_0.$$

c) Zeigen Sie, daß jede Lösung aus (b) maximal auf einem beschränkten Zeitintervall existiert und geben Sie das Randverhalten der Lösungen an.

Aufgabe 9: (H09T2A2) Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$x'(2x^3 + 2x + 2xt^2) = -2t^3 - 2x^2t$$

Man zeige, daß jede Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$

a) beschränkt bleibt

b) nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Hinweis: Man finde ein geeignetes erstes Integral $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 10: (F13T2A3)

Sei $L \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + Ly(x) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1 \tag{4}$$

a) Zeigen Sie mittels Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$, daß (4) eine Lösung $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Ist die Lösung aus (a) auf $]-1,1[$ eindeutig bestimmt?

Hinweis zu (a): Bestimmen Sie zunächst durch formale Differentiation der Potenzreihe die Koeffizienten c_j. Untersuchen Sie dann den Konvergenzradius der so definierten Potenzreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die formale Differentiation nun gerechtfertigt?