Übungsblatt 9 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 138: (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum, $(\mu_n : \mathcal{A} \to [0,\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen mit $\mu_n(A) \le \mu_{n+1}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{A}$. Zeige:

a) $\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0,\infty] \\ A & \mapsto & \mu(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \sup\{\mu_n(A) : n \in \mathbb{N}\} \end{array}$ ist ein Maß.

b) Ist $f : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}-$meßbar, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f d\mu_n = \int\limits_X f d\mu$$

Aufgabe 139: (10 Punkte)

a) Zeige: Für alle $y \ge 0$ ist die Folge $\left(\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend.

b) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0,\infty[$ $\mathcal{A}-$meßbar. Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X n \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu$$

Aufgabe 140: (10 Punkte)

a) Es sei $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0,\infty]$ sei $\mathcal{A}-$meßbar. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0,\infty] \\ A & \mapsto & \int\limits_X f \mathbf{1}_A d\nu \end{array}$$

ein Maß definiert.

b) Es sei nun konkret $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ und ν das Zählmaß. Für $f : \mathbb{Z} \to [0,\infty]$ sei μ das in (a) definierte Maß. Berechne für $g : \mathbb{Z} \to [0,\infty]$ das Integral $\int\limits_{\mathbb{Z}} g d\mu$.

c) Es sei nun $f(n) = e^{-|n|}$. Ist $\begin{array}{rcl} h : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \begin{cases} -\frac{(-1)^{|n|}}{|n|} & \text{für } n \neq 0 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases} \end{array}$ $\mu-$integrierbar? Wenn ja, so berechne $\int\limits_{\mathbb{Z}} h d\mu$.

Aufgabe 141: (10 Punkte)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(n(x-a)) - \arctan(n(x-b)) \end{array}$.
Es sei $M \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $y_1, ..., y_M \in \mathbb{R}$ vorgegeben und

$$\mu = \sum_{k=1}^{M} \delta_{y_k} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$$

die Summe der Deltamaße. Zeige, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$

existiert und berechne diesen Grenzwert.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 10.1.2019, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!