

## Übungsblatt 8 zu Mathematik III für Physiker

### Aufgabe 134: (10 Punkte)

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Zeige, daß die Ableitung  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -meßbar ist.

Es sei  $\emptyset \neq X$  eine Menge, dann heißt  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine **Mengenalgebra**, wenn

- a)  $\emptyset, X \in \mathcal{R}$
- b) Für jedes  $A \in \mathcal{R}$  ist  $X \setminus A \in \mathcal{R}$ .
- c) Für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  ist  $A \cup B \in \mathcal{R}$ .

gilt.

### Aufgabe 135: (10 Punkte)

Es sei  $\emptyset \neq X$  und  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine Mengenalgebra mit der Eigenschaft  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$  für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von paarweise disjunkten  $A_n \in \mathcal{R}$ . Zeige, daß  $\mathcal{R}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  ist.

### Aufgabe 136: (10 Punkte)

- a) Zeige:  $\mathcal{R} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ endlich oder } \mathbb{N} \setminus A \text{ endlich}\}$  ist eine Mengenalgebra auf  $\mathbb{N}$ .
- b) Bestimme die von  $\mathcal{R}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{R})$  auf  $\mathbb{N}$ .
- c) Zeige:  $\nu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty[$  ist ein Inhalt.  

$$A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1 & \text{falls } \mathbb{N} \setminus A \text{ endlich} \end{cases}$$
- d) Zeige:  $\nu$  läßt sich nicht zu einem Maß auf  $\sigma(\mathcal{R})$  fortsetzen.

### Aufgabe 137: (10 Punkte)

Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein Meßraum,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}$  und  $\mu_1 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty[$  und  $\mu_2 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty[$  Maße mit

- $\mu_1(A) = \mu_2(A)$  für alle  $A \in \mathcal{E}$ .
- $\mu_1(X) = \mu_2(X) < \infty$ .

Zeige  $\mu_1 = \mu_2$ .

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 13.12.2018, 14 Uhr**  
 – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1.  
 Stock