Übungsblatt 6 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 126: (10 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$. Entscheide, ob die Grenzwerte

$$\lim_{x \searrow 0} x^x \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}$$

existieren und berechne alle Grenzwerte, die existieren.

Aufgabe 127: (10 Punkte)
Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^6+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

a) in $(0,0)$ nicht stetig ist

b) in $(0,0)$ die Ableitungen von f in Richtung $(1,0)$ und $(0,1)$ existieren

c) es Richtungen $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ gibt, so daß f in $(0,0)$ keine Richtungsableitung in Richtung (v_1, v_2) besitzt.

d) f auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 128: (10 Punkte)
Es sei $A \in M_d(\mathbb{C})$, $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{C}^d$.

a) Zeige, daß $\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R} &\to \mathbb{C}^d \\ t &\mapsto e^{i(t-\tau)A}\xi \end{aligned}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = iAy, y(\tau) = \xi$ ist, dh. daß λ differenzierbar ist, $\lambda'(t) = iA\lambda(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda(\tau) = \xi$ erfüllt sind.

b) Berechne für $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 7 & 7 & -4 \\ -2 & 8 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, $\tau = 1$ und $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ explizit diese Lösung.
Hinweis: Man darf Aufgabe 78 verwenden.

Aufgabe 129: (10 Punkte) Zeige, daß

$$\begin{aligned} f :]-1,1[\times]0,\infty[\times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \ln\left(\sqrt{1-x_1^2}\right) + \arctan(x_3) \\ x_2^{x_2} \ln(1+x_3^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

stetig differenzierbar ist und berechne die Ableitung.
Hinweis: arctan ist die Umkehrfunktion von $\begin{aligned} \widetilde{\tan} :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) = \tfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$. Welche Eigenschaften von arctan muß man hier noch beweisen?

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 29.11.2018, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock