Übungsblatt 5 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 123: (15 Punkte)
Es sei X ein $\mathbb{R}-$Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke

$$[\![x, y]\!] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\} \subseteq K$$

in K enthalten ist. Ist $K \subseteq X$ konvex, dann heißt eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ **konvex**, wenn

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

für alle $x, y \in K$ und $t \in [0, 1]$ erfüllt ist. $f : K \to \mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn $-f$ konvex ist. Zeige:

a) $K \subseteq X$ ist genau dann konvex, wenn für alle $a, b \in K$ mit $a \neq b$ ein Intervall $I_{a,b} \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so daß für $\begin{array}{rcl}\varphi_{a,b} : \mathbb{R} & \to & X \\ t & \mapsto & a + t(b-a)\end{array}$ gilt:

$$\varphi_{a,b}(\mathbb{R}) \cap K = \varphi_{a,b}(I_{a,b}).$$

b) $f : K \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle $a, b \in K$ mit $a \neq b$ die Funktion $f \circ (\varphi_{a,b}|_{I_{a,b}}) : I_{a,b} \to \mathbb{R}$ konvex ist.

c) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.

Aufgabe 124: (10 Punkte)
Sind $y \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, so ist $a^y := e^{y \ln(a)}$ Zeige:

a) $\begin{array}{rcl}\exp : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x\end{array}$ ist konvex und $\begin{array}{rcl}\ln :]0, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x)\end{array}$ ist konkav.

b) Ist $p \in]1, \infty[$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt für alle $x, y \in [0, \infty[$:

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

c) Für $p \in]1, \infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{K}^d$ sei

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + ... + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$$

dann ist $\| \cdot \|_p : \mathbb{K}^d \to [0, \infty[$ eine Norm und für $x = (x_1, ..., x_d), y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{K}^d$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{d} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Aufgabe 125: (15 Punkte) Zeige

a) Für alle $x \in]-1, 1[$ gilt

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

b) $U := C([0, 1],]0, \infty[)$ ist offen in $C([0, 1], \mathbb{R})$.

c) $\begin{array}{rcl}F : U & \to & C([0, 1], \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \ln \circ f\end{array}$ ist differenzierbar und die Ableitung

$$F' : U \to L(C([0, 1], \mathbb{R}), C([0, 1], \mathbb{R}))$$

ist stetig.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 22.11.2018, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock