Übungsblatt 4 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 120: (15 Punkte)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Zeige:

a) $U := \{S : X \to X \in L(X,X) : S \text{ invertierbar } \} \subseteq L(X,X)$ ist offen.

b) $\begin{array}{rcl} \psi : U & \to & L(X,X) \\ S & \mapsto & S^{-1} \end{array}$ ist stetig und differenzierbar und $\begin{array}{rcl} \psi'(S) : L(X,X) & \to & L(X,X) \\ T & \mapsto & -S^{-1}TS^{-1} \end{array}$ ist die Ableitung von ψ an der Stelle $S \in U$

c) Die Ableitung $\begin{array}{rcl} \psi' : U & \to & L(L(X,X), L(X,X)) \\ S & \mapsto & \psi'(S) \end{array}$ ist stetig.

Aufgabe 121: (15 Punkte)
Es sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum. Zeige $\begin{array}{rcl} F : \mathcal{H}\backslash\{\mathbf{0}\} & \to &]0,\infty[\\ \varphi & \mapsto & \|\varphi\| \end{array}$ ist differenzierbar und die Ableitung $\begin{array}{rcl} F' : \mathcal{H}\backslash\{\mathbf{0}\} & \to & L(\mathcal{H}, \mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & F'(\varphi) \end{array}$ ist wieder stetig.

Aufgabe 122: (10 Punkte)

a) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & x_1^2 + 2x_2^6 + 3x_3^4 \end{array}$ differenzierbar ist und berechne für jedes $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ die Ableitung $f'(\underline{a})$ von f an der Stelle $\underline{a}$.

b) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3\backslash\{\underline{0}\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt[3]{x_1^2 + 2x_2^6 + 3x_3^4} \\ \dfrac{x_1x_2x_3}{x_1^2 + 2x_2^6 + 3x_3^4} \end{pmatrix} \end{array}$ auf $\mathbb{R}^3\backslash\{\underline{0}\}$ differenzierbar ist und berechne für jedes $\underline{a} \in \mathbb{R}^3\backslash\{\underline{0}\}$ die Ableitung $g'(\underline{a})$ von g an der Stelle $\underline{a}$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 15.11.2018, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock