Übungsblatt 2 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 113: (10 Punkte)
Es sei X eine Menge und $g \in B(X,\mathbb{C}) = \{g : X \to \mathbb{C} : \|g\|_\infty := \sup\{|g(x)| : x \in X\} < \infty\}$. Zeige:

$$\begin{array}{rcl} M_g : B(X,\mathbb{C}) & \to & B(X,\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & \left(\begin{array}{rcl} M_g[f] : X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{array} \right) \end{array}$$

definiert einen beschränkten linearen Operator mit $|||M_g||| = \|g\|_\infty$

Aufgabe 114: (10 Punkte) Zeige:

a) $\mathcal{D} := \left\{ f \in B(\mathbb{R},\mathbb{C}) : \left(\begin{array}{rcl} M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & xf(x) \end{array} \right) \in B(\mathbb{R},\mathbb{C}) \right\}$ ist ein Untervektorraum von $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

b) $\begin{array}{rcl} M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} : \mathcal{D} & \to & B(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}[f] \end{array}$ ist ein linearer Operator, der nicht stetig ist.

Aufgabe 115: (10 Punkte) Es seien X und Y $\mathbb{K}-$Banachräume und $F : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung. Zeige:

a) Ist $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Reihe in X, dann ist $\left(\sum_{k=1}^{n} F[x_k] \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Reihe in Y und in diesem Fall gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F[x_k] = F\left[\sum_{k=1}^{\infty} x_k \right]$$

für den Grenzwert.

b) Ist $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe in X, dann ist $\left(\sum_{k=1}^{n} F[x_k] \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe in Y und in diesem Fall gilt für jedes bijektive $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F[x_{\sigma(k)}] = F\left[\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} \right]$$

für den Grenzwert.

Aufgabe 116: (10 Punkte) Versehe $C([0,1],\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und zeige:

a) Für $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, $x \in [0,1]$ wird durch

$$(T[f])(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} f(x^n)$$

ein stetiger linearer Operator

$$\begin{array}{rcl} T : C([0,1],\mathbb{R}) & \to & C([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & T[f] \end{array}$$

definiert.

b) $|||T||| = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{id} - T$ ist invertierbar.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 31.10.2018, 10 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock