Ferienblatt zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 152: (10 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p, q \in]1, \infty[$ mit $p < q$, $t \in]0, 1[$ und $\frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}$. Zeige: Ist $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$, so ist $f \in L^r(X)$ und

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{1-t} \cdot \|f\|_{L^q}^{t}.$$

Aufgabe 153: (10 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma-$endliche Maßräume und $k : X \times Y \to \mathbb{C}$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}-$meßbar. Es seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und

$$M_{p,\infty} := \sup \left\{ \left(\int_X |k(x,y)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} : y \in Y \right\} < \infty.$$

Zeige daß durch

$$(Kf)(y) := \int_X k(x,y) f(x) d\mu(x)$$

eine beschränkte lineare Abbildung $\begin{array}{rcl} K : L^p(X) & \to & L^\infty(Y) \\ f & \mapsto & Kf \end{array}$ mit $|||K||| \leq M_{p,\infty}$ definiert wird.

Aufgabe 154: (10 Punkte)

Es sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Borelmaß.

a) Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & [0, \infty] \\ A & \mapsto & \displaystyle\int_A \frac{|x|}{1+x^2} d\lambda(x) \end{array}$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert.

b) Es sei $\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{|x|}{(1+x^2)(1+x^{2n})} \end{array}$. Zeige, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) d\lambda(x)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) d\lambda(x) = \nu(]-1, 1[) = \ln 2$$

gilt.

Aufgabe 155: (10 Punkte)

Es sei λ^2 das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$. Zeige die Existenz und berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|x| e^{-x^2 - iy}}{1 + y^{2n}} d\lambda^2(x,y)$$

Aufgabe 156: (10 Punkte)

Auf dem Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{Z})$ ist der sogenannte Shiftoperator $S : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ definiert durch $(S\psi)(k) := \psi(k+1)$ für alle $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ und alle $k \in \mathbb{Z}$. Berechne S^* und zeige, daß S ein unitärer Operator auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ ist.

Aufgabe 157: (10 Punkte)
Wir betrachten den Maßraum $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \lambda)$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen

$$f_n : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array} .$$

a) Zeige: Es gilt $f_n \in L^2([-1,1])$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens orthonormiere $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Aufgabe 158: (20 Punkte)
Berechne die folgenden Integrale

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} \, \mathrm{d}x$

b) $\int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)} \, \mathrm{d}x$

c) $\int_0^1 \arctan(x) \, \mathrm{d}x$

d) $\int_0^1 \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x + 2x)} \, \mathrm{d}x$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3(x)) \sqrt{\sin(x)} \, \mathrm{d}x$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3+\cos(x)} \, \mathrm{d}x$

Mit den Punkten des Ferienblatts kann man das Übungspunktekonto nur verbessern; die Zahl der benötigten Punkte (also 35% aus den ersten zwölf Blättern) ändert sich nicht. Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 24.4.2019, 14 Uhr – im Übungskasten (Nummer 19) vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock