Übungsblatt 12 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 149: (10 Punkte)
Es sei $d \in \mathbb{N}$, $A \in M_d(\mathbb{R})$ eine selbstadjungierte Matrix, die nur strikt positive Eigenwerte besitzt und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$. Zeige:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle x, Ax \rangle} d\lambda^d(x) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Aufgabe 150: (10 Punkte)
Es seien $R_0, R_1 \in [0, \infty]$ mit $R_0 < R_1$, $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^3$ und

$$K_{R_0,R_1} := \{x \in \mathbb{R}^3 : R_0 < \|x\| < R_1\}.$$

Eine Funktion $g : K_{R_0,R_1} \to \mathbb{C}$ heißt **rotationssymmetrisch**, wenn es eine Funktion $\tilde{g} :]R_0, R_1[\to \mathbb{C}$ gibt, so daß $g(x) = \tilde{g}(\|x\|)$ für jedes $x \in K_{R_0,R_1}$ gilt. Zeige: Eine rotationssymmetrische Funktion $g : K_{R_0,R_1} \to \mathbb{C}$ ist genau dann λ^3-integrierbar auf K_{R_0,R_1}, wenn $\int_{R_0}^{R_1} |\tilde{g}(r)| r^2 dr < \infty$ ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_{K_{R_0,R_1}} g d\lambda^3 = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \tilde{g}(r) r^2 dr$$

Aufgabe 151: (20 Punkte)
Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$, $\lambda^d : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : f \text{ meßbar }, \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda^d < \infty \right\}$. Zeige:

a) Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ und $k \in \mathbb{R}^d$ existiert

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle k, x \rangle} f(x) d\lambda^d(x)$$

und $\begin{array}{rcl} \widehat{f} : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ k & \mapsto & \widehat{f}(k) \end{array}$ definiert eine stetige Funktion mit

$$\|\widehat{f}\|_\infty := \sup\{|\widehat{f}(k)| : k \in \mathbb{R}^d\} \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda^d$$

b) Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}$ kompakt in $\mathbb{R}^d$, so gilt $f, D_j f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $j \in \{1, ..., d\}$ und $|\widehat{f}(k)| \overset{\|k\| \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $\mathrm{supp}(f)$ kompakt in $\mathbb{R}^d$, so gilt

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial k_j}(k) & = & -i\widehat{x_j f}(k) \\ \widehat{D_j f}(k) & = & ik_j \widehat{f}(k) \end{array}$$

d) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ und $h \in \mathbb{R}^d$, so ist $\begin{array}{rcl} \tau_h f : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x-h) \end{array} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\widehat{(\tau_h f)}(k) = e^{-i\langle k, h \rangle} \hat{f}(k)$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 31.1.2019, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock