Übungsblatt 11 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 146: (15 Punkte)
Zeige, daß

$$l^2(\mathbb{N}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

versehen mit

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{l^2(\mathbb{N})} : l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N}) &\to \mathbb{C} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n \end{aligned}$$

einen separablen Hilbertraum bildet.

Aufgabe 147: (15 Punkte)
Es sei $\widehat{\lambda}$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.

a) Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to l^2(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(x^2+1)} \right)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

$\widehat{\lambda}-$integrierbar ist.

b) Berechne $\int\limits_{\mathbb{R}} f d\widehat{\lambda}$.

Aufgabe 148: (10 Punkte) Berechne den Wert der folgenden Integrale:

a) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$

b) $\int\limits_0^\pi e^x \sin(x)\, dx$

c) $\int\limits_2^4 \frac{1}{2x^2+4x-1}\, dx$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 24.1.2019, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock