Übungsblatt 10 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 142: (10 Punkte)
Es sei $\alpha \in]0,\infty[$, $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein endlicher Maßraum und $(f_n : X \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{C})-$meßbaren Funktionen mit $|f_n(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in X$ konvergiere die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ und damit ist die Funktion
$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{aligned}$$
definiert. Zeige, daß f $\mu-$integrierbar ist und

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

gilt.

Aufgabe 143: (10 Punkte)
Es sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein endlicher Maßraum und $(f_n : X \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mu-$integrierbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{C})-$meßbare Funktion und es gibt ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\backslash N\} = 0.$$
Zeige, daß f $\mu-$integrierbar ist und

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

gilt.

Aufgabe 144: (10 Punkte) Zeige, daß für alle $\alpha > 0$ die Funktion
$$\begin{aligned} f_\alpha :]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-\alpha x}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3 \end{aligned}$$
bezüglich des Borel-Lebesguemaßes λ integrierbar ist und daß die Funktion
$$\begin{aligned} F :]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \int_{[0,\infty]} e^{-\alpha x}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3 d\lambda(x) \end{aligned}$$
stetig ist.

Aufgabe 145: (10 Punkte)
Es sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$, $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und konvex. Zeige: Für jede $\mu-$integrierbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(X) \subseteq I$ und $\varphi \circ f : X \to \mathbb{R}$ $\mu-$integrierbar gilt:
$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)}\int_X \varphi \circ f d\mu$$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 17.1.2019, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock