Übungsblatt 1 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 110: (10 Punkte)
Zeige, daß die Menge $K := \{(-1)^{n^2}(1+\frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 1\}$ in $\mathbb{R}$ versehen mit der Standardtopologie kompakt ist.

Aufgabe 111: (10 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ offen, $X \setminus U \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq K \subseteq X$ relativ kompakt in U. Zeige daß $\operatorname{dist}(\overline{K}, X \setminus U) > 0$ ist.

Aufgabe 112: (20 Punkte)
Betrachte den Raum aller stetigen Funktionen

$$\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

und zeige:

a) $\|\cdot\|_\infty$ definiert eine Norm.

b) $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

c) Der abgeschlossene Einheitskreis $\overline{K}(0,1) := \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ ist beschränkt, aber nicht totalbeschränkt.
Hinweis: Betrachte Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ der Form

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 2^{-(n+1)}] \\ 1 - 2^{n-1}(x - 2^{-(n+1)}) & \text{für } x \in]2^{-(n+1)}, 2^{-n}[\\ 0 & \text{für } x \in [2^{-n}, 1] \end{cases}$$

d) $\overline{K}(0,1)$ ist nicht kompakt.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Donnerstag 25.10.2018, 14 Uhr – vor der Vorlesung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock