

Übungsblatt 9 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 32: (10 Punkte)

a) Zeige, daß $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne für jedes

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 x_3^4$$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ die Ableitung $f'(\underline{a})$ von f an der Stelle \underline{a} .

b) Es sei $W := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \text{ oder } z = 0\}$. Zeige, daß

$$g : \mathbb{R}^3 \setminus W \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 x_3^4} \\ \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 x_3^4} \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus W$ differenzierbar ist und berechne für jedes $\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus W$ die Ableitung $g'(\underline{a})$ von g an der Stelle \underline{a} .

Aufgabe 33: (10 Punkte)

Zeige, daß

$$T : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$$

$$f \mapsto e^{-f}$$

differenzierbar ist und berechne für $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ die Ableitung $T'(f)$.

Aufgabe 34: (10 Punkte)

Es sei X ein reeller Banachraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \rightarrow X$ stetig. f heißt in a **rechtseitig** bzw. **linkseitig** differenzierbar, wenn in X die Grenzwerte

$$(D_+ f)(a) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad (D_- f)(a) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existieren. Zeige: f ist genau dann in a differenzierbar, wenn f in a linkseitig und rechtsseitig differenzierbar ist und $(D_+ f)(a) = (D_- f)(a)$ gilt. In diesem Fall ist $f'(a) = (D_+ f)(a) = (D_- f)(a)$.

Aufgabe 35: (10 Punkte)

Es seien X_1, X_2, Y \mathbb{K} -Banachräume und $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ sei stetig und bilinear. Zeige, daß f in jedem $\underline{a} = (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$ differenzierbar ist mit

$$f'((a_1, a_2))[(x_1, x_2)] = f(a_1, x_2) + f(x_1, a_2)$$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 10.1.2019, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!