Übungsblatt 8 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 28: (10 Punkte)
$\mathbb{R}$ werde mit der Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ versehen und es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ein Ringhomomorphismus dh. $f(1)=1, f(0)=0$ und $f(w+z)=f(w)+f(z)$, $f(wz)=f(w)f(z)$ für alle $w,z\in\mathbb{R}$. Zeige, daß $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ der einzige bezüglich $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ stetige Ringhomomorphismus auf $\mathbb{R}$ ist.
Hinweis: Was ist $f(x)$, wenn $x\in\mathbb{N}$, bzw. $x\in\mathbb{Z}$, bzw... ist?

Aufgabe 29: (10 Punkte)
Es sei $n=2k+1\in\mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$ mit $a_n\neq 0$. Zeige, daß die Funktion
$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_nx^n+...+a_1x+a_0 \end{array}$$
eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 30: (10 Punkte)
Zeige, daß
$$\begin{array}{rcl} \sec|_{]0,\frac{\pi}{2}[}:]0,\frac{\pi}{2}[& \to &]1,\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\cos(x)} \end{array}$$
ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 31: (10 Punkte)
Es sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ ein hausdorffscher topologischer Raum und $f:X\to Y$ stetig und bijektiv. Zeige: f ist Homöomorphismus.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 13.12.2018, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock