Übungsblatt 7 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 24: (10 Punkte)
Die Räume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ seien mit ihren Standardtopologien versehen. Zeige, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ nicht homöomorph sind.
Hinweis: Betrachte die Komplemente von einpunktigen Mengen.

Aufgabe 25: (10 Punkte)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Zeige, daß $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ eine kompakte Teilmenge von X ist.

Aufgabe 26: (10 Punkte)

a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen mit $X\backslash U \neq \emptyset$. Ferner sei $\emptyset \neq K \subseteq X$ kompakt und $K \subseteq U$. Zeige, daß

$$\operatorname{dist}(K, X\backslash U) := \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in X\backslash U\} > 0$$

gilt.

b) Es sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in \mathbb{C}\backslash U$; $K \subseteq \mathbb{C}$ sei kompakt mit $\emptyset \neq K \subseteq U$. Zeige, daß $\begin{aligned} f_a : U &\to [0,\infty[\\ z &\mapsto \frac{1}{|z-a|} \end{aligned}$ eine wohldefinierte stetige Funktion ist und die Einschränkung $\begin{aligned} (f_a)|_K : K &\to [0,\infty[\\ z &\mapsto \frac{1}{|z-a|} \end{aligned}$ beschränkt ist.

Aufgabe 27: (10 Punkte)
Es sei $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Zeige:

a) $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to\ ]-1,1[\\ x &\mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$ ist bijektiv und läßt sich zu einer bijektiven Abbildung

$$\begin{aligned} F : \widehat{\mathbb{R}} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{für } x = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

fortsetzen.

b) $\begin{aligned} d : \widehat{\mathbb{R}} \times \widehat{\mathbb{R}} &\to [0,\infty[\\ (x,y) &\mapsto d(x,y) := |F(x) - F(y)| \end{aligned}$ ist eine Metrik auf $\widehat{\mathbb{R}}$.

c) Ist $\mathcal{O}_d$ die von d definierte Topologie, so ist $(\widehat{\mathbb{R}}, \mathcal{O}_d)$ kompakt.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 6.12.2018, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock