

Übungsblatt 6 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 20: (10 Punkte)

Zeige, daß für jedes $z \in \mathbb{R}$ die Reihe $\left(\sum_{n=1}^N \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ absolut konvergiert und die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8}$$

stetig ist.

Aufgabe 21: (10 Punkte)

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt **wegzusammenhängend**, wenn es für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow X$ (einen „Weg“) mit $\gamma(\alpha) = x$ und $\gamma(\beta) = y$ gibt. Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn (Y, \mathcal{O}_Y) bezüglich der Relativtopologie $\mathcal{O}_Y := \{Y \cap V : V \in \mathcal{O}_X\}$ auf Y **wegzusammenhängend** ist. Zeige:

- Ist X ein **wegzusammenhängender** topologischer Raum, so ist X auch **zusammenhängend**.
- Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein **normierter \mathbb{R} -Vektorraum**, $\emptyset \neq U \subseteq X$ **offen und zusammenhängend** (bezüglich der Normtopologie), so ist U **wegzusammenhängend**.

Aufgabe 22: (10 Punkte)

Zeige, daß $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (mindestens) zwei reelle Nullstellen hat und bestimme

$$x \mapsto \sqrt{|x|} - \cos(x^2)$$

diese bis auf einen Fehler $< \frac{1}{100}$.

Aufgabe 23: (10 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und \mathbb{C} mit der Standardtopologie versehen. Bestimme die Zusammenhangskomponenten von $G := \{z \in \mathbb{C} : \frac{\operatorname{Re}(z)}{a} + \frac{\operatorname{Im}(z)}{b} = 1\}$, $E := \{z \in \mathbb{C} : \frac{(\operatorname{Re}(z))^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im}(z))^2}{b^2} = 1\}$ und $\mathbb{C} \setminus G$

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 29.11.2018, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock