Übungsblatt 5 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 16: (10 Punkte)
Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\emptyset \neq A_n \subseteq X$. Für $n \in \mathbb{N}$, gelte:

a) A_n abgeschlossen,

b) $A_{n+1} \subseteq A_n$,

c) $\delta(A_n) := \left\{ \begin{array}{ll} \sup\{d(x,y):\ x,y \in A_n\}, & \text{falls } \{d(x,y):\ x,y \in A_n\} \text{ nach oben beschränkt,} \\ \infty, & \text{sonst,} \end{array} \right\}$

erfüllt $\delta(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Zeige, daß es ein $a \in X$ gibt mit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}$.

Aufgabe 17: (10 Punkte)

a Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte $\mathbb{K}-$Vektorräume. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty : X \times Y & \to & [0,\infty[\\ (x,y) & \mapsto & \|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \end{array}$$

eine Norm definiert.

b) Es sei $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_X}$ die von $\|\cdot\|_X$ auf X definierte Topologie und genauso $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_Y}$ die von $\|\cdot\|_Y$ auf Y definierte Topologie bzw. $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_\infty}$ die von $\|\cdot\|_\infty$ auf $X \times Y$ definierte Topologie. Ferner sei $\mathcal{O}_{X\times Y}$ die Produkttopologie von $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_X}$ und $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_Y}$ auf $X \times Y$. Zeige: $\mathcal{O}_{X\times Y} = \mathcal{O}_{\|\cdot\|_\infty}$.

c) Zeige, daß $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.

Aufgabe 18: (10 Punkte)
Zeige, daß das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{10} + \frac{xy^2}{5} - x & = & \frac{1}{10} \\ \frac{y^2}{5} - \frac{x^4}{10} - y & = & 0 \end{array}$$

auf der Menge $M = [-1,1]^2$ genau eine Lösung besitzt mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Von $(x,y) = (0,0)$ startend, wieviele Iterationen sind notwendig, um sicher zu sein, dass sich die Koordinaten der approximativen und tatsächlichen Lösung um weniger als 10^{-6} unterscheiden. Berechne die Approximation nach 2 Iterationschritten. Hinweis: Verwenden der Maximumsnorm kann die Rechnungen vereinfachen.

Aufgabe 19: (10 Punkte)
Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \end{array}$.

a) Zeige, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert und bestimme die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeige, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert.

c) Sei $q \in [0,1[$ und $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq q\}$. Zeige, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig gegen f konvergiert.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 22.11.2018, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock