

## Übungsblatt 4 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

### Aufgabe 12: (10 Punkte)

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zu  $x \in X$  und  $r > 0$  sei  $\overline{K}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$  und  $\overline{K}(x, r)$  der Abschluß von  $K(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$  bezüglich der durch die Metrik induzierten Topologie,  $\mathcal{O}_d$ .

- a) Zeige  $\overline{K(x, r)} \subseteq \overline{K}(x, r)$ .
- b) Ist  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, so gilt sogar  $\overline{K(x, r)} = \overline{K}(x, r)$ .
- c) Gib ein Beispiel für einen metrischen Raum  $(X, d)$ , ein  $x \in X$  und  $r > 0$  an, mit  $\overline{K(x, r)} \neq \overline{K}(x, r)$ .

### Aufgabe 13: (10 Punkte)

Es sei  $(X, \mathcal{O})$  ein hausdorffscher topologischer Raum und  $x \in X$ . Zeige, daß  $\{x\}$  (bzgl.  $\mathcal{O}$ ) abgeschlossen ist.

### Aufgabe 14: (10 Punkte)

Es seien  $(V, \|\cdot\|)$  und  $(W, |||\cdot|||)$  normierte Vektorräume. Eine Funktion  $f : V \rightarrow W$  heißt lokal Lipschitz stetig, wenn es für jedes  $x \in V$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  (bzgl. der Normtopologie) und ein  $L(U) \in [0, \infty[$  gibt, so daß

$$|||f(v) - f(w)||| \leq L(U)\|v - w\|$$

für alle  $v, w \in U$  gilt. Zeige: Ist  $f : V \rightarrow W$  lokal Lipschitz stetig, so ist  $f$  auch stetig.

### Aufgabe 15: (10 Punkte)

Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und es sei  $A \subseteq X$ .

- a)  $\{0, 1\}$  werde mit der Topologie  $\mathcal{P}(\{0, 1\})$  versehen. Zeige, daß die charakteristische Funktion von  $A$  also  $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  genau dann in einem Punkt  $a \in X$ 

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}$$
 stetig ist, wenn  $a \in X \setminus \partial A$  gilt.

- b) Versehe  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$  mit der Standardtopologie  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ . Wo ist  $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}$$
 stetig?

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 15.11.2018, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock**