

Übungsblatt 4 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 12: (10 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu $x \in X$ und $r > 0$ sei $\overline{K}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ und $\overline{K}(x, r)$ der Abschluß von $K(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ bezüglich der durch die Metrik induzierten Topologie, \mathcal{O}_d .

- a) Zeige $\overline{K(x, r)} \subseteq \overline{K}(x, r)$.
- b) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so gilt sogar $\overline{K(x, r)} = \overline{K}(x, r)$.
- c) Gib ein Beispiel für einen metrischen Raum (X, d) , ein $x \in X$ und $r > 0$ an, mit $\overline{K(x, r)} \neq \overline{K}(x, r)$.

Aufgabe 13: (10 Punkte)

Es sei (X, \mathcal{O}) ein hausdorffscher topologischer Raum und $x \in X$. Zeige, daß $\{x\}$ (bzgl. \mathcal{O}) abgeschlossen ist.

Aufgabe 14: (10 Punkte)

Es seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(W, |||\cdot|||)$ normierte Vektorräume. Eine Funktion $f : V \rightarrow W$ heißt lokal Lipschitz stetig, wenn es für jedes $x \in V$ eine Umgebung U von x (bzgl. der Normtopologie) und ein $L(U) \in [0, \infty[$ gibt, so daß

$$|||f(v) - f(w)||| \leq L(U)\|v - w\|$$

für alle $v, w \in U$ gilt. Zeige: Ist $f : V \rightarrow W$ lokal Lipschitz stetig, so ist f auch stetig.

Aufgabe 15: (10 Punkte)

Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und es sei $A \subseteq X$.

- a) $\{0, 1\}$ werde mit der Topologie $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ versehen. Zeige, daß die charakteristische Funktion von A also $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ genau dann in einem Punkt $a \in X$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}$$
 stetig ist, wenn $a \in X \setminus \partial A$ gilt.

- b) Versehe $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$ mit der Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$. Wo ist $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}$$
 stetig?

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 15.11.2018, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock