Übungsblatt 3 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 9: (10 Punkte)
Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge. Zeige,

$$B(X,\mathbb{C}) := \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty\}$$

versehen mit punktweiser Addition bzw. Skalarmutiplikation und $\|\cdot\|_\infty$ ist ein vollständiger normierter Raum.

Aufgabe 10: (15 Punkte)
Es $(\mathbb{C}, \mathcal{O}_\mathbb{C})$ die vom Absolutbetrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{C}$ definierte Topologie. Bestimme die inneren Kerne, Abschlüße und Ränder für die Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+1| < 2\} \\ B &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(z) \leq 1, -1 < \mathrm{Im}\,(z) \leq 0, \mathrm{Re}\,(z) \in \mathbb{Q}\} \\ C &:= \left\{ \left[\frac{1+i\sqrt{3}}{3}\right]^n : n \in \mathbb{N} \right\} \\ D &:= \left\{ \left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right]^n : n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Aufgabe 11: (15 Punkte)
Es sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ und $|||\cdot||| : V \to [0,\infty[$ seien Normen auf V. Dann heißen $||\cdot||$ und $|||\cdot|||$ äquivalent, wenn es $c, C \in]0,\infty[$ gibt, so daß für alle $v \in V$ die Abschätzung

$$c\|v\| \leq |||v||| \leq C\|v\|$$

gilt.

a) Zeige, daß für $d \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{C}^d$ die Normen

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathbb{C}^d &\to [0,\infty[\\ (z_1, ..., z_d) &\mapsto |z_1| + ... + |z_d| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{C}^d &\to [0,\infty[\\ (z_1, ..., z_d) &\mapsto \max\{|z_1|, ..., |z_d|\} \end{aligned}$$

äquivalent sind.

b) Sind $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ und $|||\cdot||| : V \to [0,\infty[$ äquivalente Normen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V. Zeige, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|$ ist, wenn sie eine Cauchyfolge bzgl. $|||\cdot|||$ ist.

c) Sind $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ und $|||\cdot||| : V \to [0,\infty[$ äquivalente Normen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V. Zeige, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann bzgl. $\|\cdot\|$ konvergiert, wenn sie bzgl. $|||\cdot|||$ konvergiert und in diesem Fall die Grenzwerte übereinstimmen.

d) Zeige, daß zwei äquivalente Normen $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ und $|||\cdot||| : V \to [0,\infty[$ dieselbe Normtopologie definieren.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 8.11.2018, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock