Übungsblatt 2 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^d}$ das Standardskalarprodukt. Zeige: Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ hat die Form

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, A(\underline{y}) \rangle_{\mathbb{C}^d}$$

für jedes $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^d$ mit einer selbstadjungierten Matrix A, die nur positive Eigenwerte hat.

Aufgabe 6: (10 Punkte)
Bestimme für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ (bzgl. Standardskalarprodukt) aus Eigenvektoren von A.

Aufgabe 7: (10 Punkte)
Zeige, daß es eine selbstadjungierte Matrix $B \in M_3(\mathbb{R})$ mit $B^2 = A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ gibt.

Aufgabe 8: (10 Punkte) Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{C})$ sei

$$|||A|||_\infty := \max \left\{ \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| : k = 1, ..., n \right\}$$

die Norm, wie in Aufgabe 2. Es sei $A^0 := E_d$ die Einheitsmatrix und für $k \in N$ sei A^k das Matrixprodukt aus k Faktoren. Zeige, daß die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezüglich $|||\cdot|||_\infty$ konvergiert und daher der Grenzwert

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

existiert.
Hinweis: Wir werden bald zeigen, daß $(M_d(\mathbb{C}), \| \cdot \|_\infty)$ vollständig ist. Dieses Ergebnis darf man hier benutzen.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 31.10.2018, 14 Uhr – im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock