Ferienblatt zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 46: (10 Punkte)
Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ hausdorffsche topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so daß die Menge

$$U(f) := \{x \in X : f \text{ ist nicht stetig in } x\}$$

eine abzählbare Menge ist. Zeige, daß f Borel-meßbar ist.

Aufgabe 47: (10 Punkte)
Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Zeige, daß jede monotone Funktion $f : I \to J$ Borel-meßbar ist.

Aufgabe 48: (20 Punkte)
Es sei

$$\mathcal{F} := \Big\{ \bigcup_{k=1}^{N}]a_k, b_k] : N \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ mit } a_k \leq b_k \text{ für alle } k \in \{1, \dots, N\} \Big\}.$$

a) Zeige, daß $\mathcal{F}$ ein Mengenring ist.

b) Zeige, daß es genau einen Inhalt μ auf $\mathcal{F}$ gibt, so daß $\mu(]a, b]) = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt.

c) Zeige weiterhin, daß $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt und μ ein Prämaß ist.

Aufgabe 49: (15 Punkte)
Gegeben seien das Borelmaß $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ mit $\lambda(]a, b]) = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und die Funktionenfolgen $(f_n : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) := x^{2n}$ und $g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(x + 1)^k$.

a) Zeige, daß die Funktionen $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \widehat{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} f_n(x) \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) \end{array}$ messbar sind.

b) Gib das Bildmaß $\lambda \circ f^{-1} : \mathcal{B}(\widehat{\mathbb{R}}) \to [0, \infty]$ explizit an.

c) Berechne $\lambda \circ g^{-1}([1, 2])$.

Mit den Punkten des Ferienblatts kann man das Übungspunktekonto nur verbessern; die Zahl der benötigten Punkte (also 35% aus den ersten zwölf Blättern) ändert sich nicht. Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 24.4.2019, 14 Uhr – im Übungskasten (Nummer 20) vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock