Übungsblatt 12 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 42: (10 Punkte)
Es sei $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : U &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \arctan(\ln(1+xy^2)) \\ x^{xy}\sin(1+x^2y) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

stetig partiell differenzierbar ist und bestimme in jedem Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U$ die Ableitung $f'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Aufgabe 43: (10 Punkte) Zeige, daß

$$\begin{aligned} f :]0,\infty[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} + e^y \\ \sin(x) - y^3 \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in jedem Punkt von $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Aufgabe 44: (10 Punkte)
Es sei $\mathcal{E} := \{[n, n+1[: n \in \mathbb{Z}\}$. Bestimme die von $\mathcal{E}$ auf $\mathbb{R}$ erzeugte $\sigma-$Algebra.

Aufgabe 45: (10 Punkte)
Es sei $\mathcal{E} := \Big\{\{3k\} : k \in \mathbb{N}\Big\}$. Zeige, daß

$$\mathcal{A} := \left\{\bigcup_{l\in L}\{3l\} : L \subseteq \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(\mathbb{N}\backslash 3\mathbb{N}) \cup \bigcup_{l\in L}\{3l\} : L \subseteq \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma-$Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ auf $\mathbb{N}$ ist.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 31.1.2019, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock