Übungsblatt 10 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 36: (15 Punkte)

a) Sind $A, J, T \in M(d \times d, \mathbb{C})$, T invertierbar mit $A = T^{-1}JT$, dann gilt

$$e^{tA} = T^{-1}e^{tJ}T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Berechne e^{tJ} für $t \in \mathbb{R}$ und

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M(d \times d, \mathbb{C}).$$

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Berechne e^{tA}.

Aufgabe 37: (15 Punkte)

a) Zeige, daß $\widetilde{\tan} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x)$ bijektiv und stetig ist.

b) Es sei $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die Umkehrfunktion von $\widetilde{\tan}$. Zeige, daß arctan differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

c) Zeige, daß für alle $x \in \left]-1, 1\right[$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$$

Aufgabe 38: (10 Punkte)

a) Zeige, daß $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 - y^3 > 0\}$ offen ist.

b) Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : U &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x^y \\ \ln(x^2 - y^3) \\ x\sqrt{x^2 - y^3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 17.1.2019, 14 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock