Übungsblatt 1 zu Analysis mehrerer Variablen (Lehramt)

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeige, daß durch

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$$

eine Norm $\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n & \to & [0,\infty[\\ \underline{x} & \mapsto & \|\underline{x}\|_\infty \end{array}$ definiert wird. Erfüllt diese Norm die Parallelogrammgleichung $\|\underline{x}+\underline{y}\|_\infty^2 + \|\underline{x}-\underline{y}\|_\infty^2 = 2\|\underline{x}\|_\infty^2 + 2\|\underline{y}\|_\infty^2$ für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$? Falls ja begründe dies. Falls nein finde ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Zu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{K})$ definiere

$$|||A|||_\infty := \max\left\{ \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| : k = 1, ..., m \right\}$$

und zeige:

a) $\begin{array}{rcl} |||\cdot|||_\infty : M(m \times n, \mathbb{K}) & \to & [0,\infty[\\ A & \mapsto & ||A|||_\infty \end{array}$ definiert eine Norm auf $M(m \times n, \mathbb{K})$.

b) Für alle $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ gilt $\|A\underline{x}\|_\infty \leq |||A|||_\infty \cdot \|\underline{x}\|_\infty$.

Aufgabe 3: (15 Punkte) Zeige, dass der Raum der Folgen

$$l^2(\mathbb{N}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \mathbb{C} \text{ mit } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

ein Vektorraum ist. Zeige, dass

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle : l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{C} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n \end{array}$$

ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 4: (5 Punkte) Bestimme für

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 : v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \right\}$$

eine Orthonormalbasis von U (bzgl. des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^4$.

Abgabe: je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 25.10.18, 14.00 Uhr – vor der Übung oder im Übungskasten vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock