

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (H15T2A3)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

- a) Wir betrachten die Picard-Iteration mit der Startfunktion $y_0(x) = 1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß die n -te Iterierte die Gestalt

$$y_n(x) = 1 + x + \dots + x^n + x^{n+1}r_n(x)$$

besitzt, wobei r_n ein Polynom ist. Finden Sie damit eine Potenzreihe, die (1) löst.

- b) In welchem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?
 c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems (1). Auf welchem Intervall ist sie definiert?

Aufgabe 26: (F09T1A5)

Man untersuche die Nulllösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ auf Stabilität

Aufgabe 27: (F11T3A3)

- a) Sei

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^3 + 3xy^2 - 3xy \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von g und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein (striktes) lokales Maximum oder Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt.

- b) Welche stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -6xy + 3x \\ \dot{y} &= 3x^2 + 3y^2 - 3y \end{aligned}$$

sind stabil, welche instabil?