

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis**Aufgabe 19:** (H09T1A2)

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$u'' - 10u' + 34u = 0$$

für die Randwertprobleme

a) $u(0) = 0, u(\frac{\pi}{2}) = 1;$

b) $u(0) = 0, u(\pi) = 1;$

c) $u(0) = 0, u(\pi) = 0.$

Aufgabe 20: (H07T2A5)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A(\alpha)x$ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 \\ -2 & \alpha - 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

- a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem des Systems.
- b) Geben Sie jeweils die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$ an, so daß $(0,0)$ ein stabiler bzw. asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Systems $\dot{x} = A(\alpha)x$ ist.

Aufgabe 21: (H13T1A4)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax$$

an. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $x(0) = v$ genügt und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.