Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 16: (H15T1A4)
Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige, matrixwertige Funktion. Betrachten Sie die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

a) Es seien $x_1(t), ..., x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$ Lösungen von (1). Ferner seien für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_0), ..., x_n(t_0)$ im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Zeigen Sie, daß dann für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_1), ..., x_n(t_1)$ im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Benutzen Sie das Superpositionsprinzip für lineare homogene Differentialgleichungen oder benutzen Sie die Differentialgleichung für Wronski-Determinanten.

b) Erklären Sie die Begriffe Fundamentalmatrix und Übergangsmatrix (auch Transitionsmatrix oder Hauptfundamentalmatrix genannt). Wie erhält man aus (a) eine Fundamentalmatrix und wie läßt sich die Lösung von (1) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ mithilfe der Übergangsmatrix ausdrücken?

c) Zeigen Sie: Sind $\Phi_1(t), \Phi_2(t), t \in \mathbb{R}$ Fundamentalmatrizen, so existiert eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t)C, t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 17: (H05T1A2) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = Ax \qquad \text{mit } \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{3}$$

Aufgabe 18: (H07T3A5)
Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0 \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (4).

b) Bestimmen Sie alle Startwerte $(x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)) \in \mathbb{R}^3$, so daß für deren eindeutige Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$.