Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (H17T1A1)

a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}\,(z) \leq 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$? Falls ja, bestimmen Sie, ob A kompakt ist.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n$$

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es seien C^1-Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen $g(x, y) := e^{u(x,y)} \cos(v(x, y))$ und $h(x, y) = e^{u(x,y)} \sin(v(x, y))$ für $x + iy \in \Omega$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen oder nicht.

Aufgabe 14: (H17T2A3)

a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

b) Von einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$f(0,0) = 0, \quad D_1 f(0,0) = 1, \quad D_2 f(0,0) = 2.$$

Hierbei bezeichnet D_j den partiellen Ableitungsoperator nach der $j-$ten Koordinate. Auch sei eine weitere Funktion g wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) := f(f(t,t), f(-t,t)) \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Wert der Ableitung $g'(0)$.

c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W(f)$ der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 12: (F14T3A4)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1 x_2 \\ \dot{x_2} &= e^{x_1}(1 - x_2^2) \end{aligned}$$

mit $x(0) = (1, 0)$. Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$$

auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

b) Für alle $t \in I$ gilt $-1 < \lambda_2(t) < 1$.

c) $I = \mathbb{R}$

d) $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = (0, 1)$ und $\lim_{t\to-\infty} \lambda(t) = (0, -1)$.