Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (H13T1A3) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \text{ oder } y \geq x^2 \\ 1 & \text{für } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

Beweisen Sie, daß f in $(0,0)$ unstetig ist, aber dort sämtliche Richtungsableitungen existieren.

Aufgabe 11: (F16T2A4)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel:

a) Stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.

b) Die Umkehrfunktion $f^{-1} :]c,d[\to]a,b[$ einer stetig differenzierbaren streng monotonen Funktion $f :]a,b[\to]c,d[$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.

c) Die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$ ist reell-analytisch und ihre Potenzreihendarstellung bei $x = 0$ besitzt den Konvergenzradius 1.

Aufgabe 12: (H15T2A1)
Wir betrachten $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y < 0\} \cup \{(0,0)\}$ und die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (y+1)e^x - e^y \end{array}$$

a) Geben Sie an, welche Punkte in $\mathbb{R}^2$ innere Punkte oder Randpunkte von D sind. Ist D offen oder abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie Gradienten und Hessematrix von f in allen inneren Punkten von D.

c) Welcher Punkt im Inneren von D ist eine lokale Extremstelle von f und von welchem Typ ist er? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welcher Randpunkt ist eine lokale Extremstelle von f? Begründen Sie Ihre Antwort.